Порівняльна таблиця результатів, отриманих за різними методиками і з експерименту

| $\beta^o$ | 0 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| за формулами (11)-(13) та за формулами [2] | | | | |
| $\theta^o$ | 0 | 31,46 | 48,31 | 59,79 |
| tg$\theta$ | - | 0,61 | 1,12 | 1,71 |
| x ,мм | 89,12 | 117,76 | 118,95 | 111,31 |
| Mxu, кНм | 43,24 | 42,16 | 39,59 | 36,17 |
| ст зона | прямокут | трапеція | трикутн | трикутн |
| згідно з СНиП 2.03.01-84 | | | | |
| $\theta^o$ | 0 | 37,54 | 48,31 | 59,79 |
| tg$\theta$ | - | 0,77 | 1,12 | 1,71 |
| x ,мм | 89,12 | 119,73 | 118,95 | 111,31 |
| Mxu, кНм | 45,44 | 42,35 | 39,59 | 36,17 |
| ст зона | прямокут | трикутн | трикутн | трикутн |
| експериментальні дані | | | | |
| $\theta^o$ | - | 28 | 40 | 50 |
| tg$\theta$ | - | 0,53 | 0,84 | 1,19 |
| $x_1$,мм | - | 123,61 | 131,75 | 123,41 |
| Mxu, Мпа | - | - | - | 38,1 |
| ст зона | - | трапеція | трапеція | трапеція |

1.Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелых и легких бетонов без предварительного напряжения арматуры (к СНиП 2.03.01-84*) / ЦНИИ Промзданий Госстроя СССР, НИИЖБ Госстроя СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 192 с.

2.Павликов А.Н. Экспериментально-теоретические исследования прочности, деформативности, образования и раскрытия трещин по сечениям, нормальным к продольной оси косоизгибаемых керамзитожелезобетонных элементов: Диссертация канд.. техн. наук. – Полтава, 1979. – 169 с.

3.Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.

4.Вахненко П. Ф. Сучасні методи розрахунку залізобетонних конструкцій на складні види деформацій. – К.: Будівельник, 1992. – 112 с.

*Отримано 23.02.2004*

УДК 624.073.2

Г.А.РАПОПОРТ, канд. техн. наук
*ОАО «Институт «РОСТОВТЕПЛОЭЛЕКТРОПРОЕКТ», г. Ростов-на-Дону (Российская Федерация)*

## К РАСЧЕТУ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ ПО КОМПЛЕКСНЫМ РАСЧЕТНЫМ СХЕМАМ. ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СЖИМАЕМОГО СЛОЯ - ТТСС

Рассматривается проблема учета работы деформируемого основания при расчете сооружений по единым комплексным расчетным схемам «здание - фундаментная конструкция - основание» В качестве модели упругого основания принимается модель сжимаемого слоя. Решение проблемы задания функции распределения перемещений по высоте слоя дает основание для введения термина «техническая теория сжимаемого слоя» – ТТСС. Статья является развитием работы [2].

При построении приближенных теорий вводятся некоторые гипотезы, существенно упрощающие решение задачи. Техническая теория изгиба тонких пластин (ТТИП) строится как приведение общей трехмерной задачи механики деформируемого тела к двухмерной посредством следующих допущений (т.н. гипотез Кирхгоффа - Лява [1]):

1) напряжения $\sigma_z$, $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$ являются второстепенными, т.е. они малы по сравнению с основными напряжениями $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_y$, и ими можно пренебречь при вычислении деформаций

$$\sigma_z, = 0, \quad \tau_{xz} \approx 0, \quad \tau_{yz} \approx 0; \tag{1}$$

проекция перемещений $w(x,y,z)$ на ось $Z$ принимается неизменной по толщине пластины, т.е. равной прогибу $w(x,y,0)$ срединной плоскости

$$w(x,y,z) \approx w(x,y,0); \tag{2}$$

3) при загружении пластины вертикальной нагрузкой срединная плоскость не растягивается

$$u(x,y,0) = v(x,y,0). \tag{3}$$

Из допущения о малости $\tau_{xz}$ , $\tau_{yz}$ следует:

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0, \tag{4}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \approx 0, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \approx 0. \tag{5}$$

Интегрируя эти равенства по $z$ с учетом (3), получаем:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \; v = -z\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{6}$$

т.е. так называемую *гипотезу плоской нормали* – любая прямая, нормальная к срединной плоскости до деформации, остается после деформации прямой, нормальной к срединной поверхности.

При решении задачи об упругом сжимаемом слое методом Канторовича-Власова [2], сводящим трехмерную задачу к двухмерной, приняты следующие допущения:

$$\sigma_x, \approx 0, \quad \sigma_y \approx 0, \quad \tau_{xy} \approx 0, \tag{7}$$

что следует из (14) в [2], а из (15) в [2] – что вертикальные перемещения определяются на дневной поверхности слоя, а в самом слое изменяются по некоторому закону $\Psi(z)$.

Таким образом, имея полную аналогию с технической теорией изгиба пластин (ТТИП), можно к полному решению задачи об упругом слое [2] применить термин *«техническая теория сжимаемого слоя»* – ТТСС.

Как известно, в теории изгибаемых пластин, несмотря на принятую гипотезу (1), в результате удовлетворения уравнениям равновесия упругого тела, получаем $\tau_{xz} \neq 0$, $\tau_{yz} \neq 0$. Вследствие этого противоречия возникает проблема удовлетворения статических граничных условий, связанная с заданием перерезывающих сил на контуре – так называемый парадокс граничных условий Пуассона-Кирхгофа.

Дифференциальное уравнение 4-го порядка (уравнение Софи Жермен):

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q(x,y)}{D}, \tag{8}$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, при интегрировании позволяет удовлетворить двум условиям на каждом крае, в то время как силовых факторов – три. Это противоречие разрешается, как известно, введением приведенных поперечных сил Кирхгофа.

В технической теории сжимаемого слоя, то есть первом приближенном решении пространственной задачи В.З.Власова [3], также содержится противоречие, как следствие принятых кинематических гипотез – нарушение закона парности касательных напряжений на уровне дневной поверхности.

Ниже приводится такое решение для задачи об упругом слое в рамках «технической теории сжимаемого слоя», в котором удалось добиться соблюдения условия Коши парности касательных напряжений в плоскости $z=0$.

При решении плоской задачи (плоская деформация) принимается:

$$\begin{aligned} u(x,z) &= \Psi_1(z) \cdot u(x), \\ w(x,z) &= \Psi_3(z) \cdot w(x), \end{aligned} \tag{9}$$

где функции $\Psi_1(z)$ и $\Psi_3(z)$ принимаются в виде соответственно по (36) и (38) из [2]. Теперь

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Psi_1'(z) \cdot u(x) + \Psi_3(z) \cdot w_x'(x) = \\ = -\frac{1}{H} u(x) + \Psi_3'(z) \cdot w_x'(x). \tag{10}$$

Используя граничное условие (16а) из [2] при $z$=0, $\Psi_3$ =1 получаем:

$$-\frac{1}{H} u(x) + w_x'(x) = 0 \text{, т.е.}$$

$$u(x) = H \cdot w_x'(x). \tag{11}$$

Окончательно получаем представления для поля перемещений:

$$u(x,z) = \Psi_1(z) \cdot H \cdot w'(x) = \left(1 - \frac{z}{H}\right) \cdot H \cdot w'(x) = \Phi(z) \cdot w'(x); \\ w(x,z) = \qquad\qquad = \Psi_3(z) \cdot w(x). \tag{12}$$

Деформации принимают следующий вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \Phi(z) \cdot w''(x); \; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \Psi_3'(z) \cdot w(x); \; \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \Theta(z) \cdot w'(x). \tag{13}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Phi(z) = H - z; \; \Theta(z) = \Psi_3(z) - 1. \tag{14}$$

Используя для получения матрицы жесткости двухмерного конечного элемента плоской задачи длиной $l$ известные выражения связи между напряжениями и деформациями и стандартную процедуру МКЭ, при интегрировании по координате $z$ получаем следующие выражения, которые можно трактовать как параметры рассматриваемой модели основания, в данном случае – четырехпараметрической :

$$K = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2} \delta \int_0^H \left\{\Psi_3'(z)\right\}^2 dz, \tag{15}$$

$$B = \frac{E_0}{2(1 + \mu_0)} \delta \int_0^H \left\{\Theta(z)\right\}^2 dz, \tag{16}$$

$$R = 2\frac{E_0}{1 - \mu_0^2} \delta \int_0^H \Phi(z) \cdot \Psi_3'(z) dz, \tag{17}$$

$$S_2 = 2\frac{E_0}{1-\mu_0^2}\delta\int_0^H \{\Theta(z)\}^2\,dz. \tag{18}$$

Здесь $\delta$– ширина рассматриваемой полосы основания.

Первый параметр (15) – полностью (с точностью до множителя $\delta$) совпадает с традиционным параметром $K$ [3], характеризующим сопротивление слоя сжатию, и имеет размерность (т/м$^2$) (решается плоская задача!).

Второй параметр (16) – является аналогом параметра $2t$ из решения [3], имеет ту же размерность (т), но отличается от него по величине, так как интегрируется другая функция аппроксимации перемещений по высоте слоя. Третий параметр (17) также имеет размерность (т), а четвертый (18) – имеет размерность (тм$^2$) и порожден учетом «крутильной» жесткости рассматриваемой модели.

Матрица жесткости КЭ основания длиной $l$ порядка $4*4$ (вводятся по два неизвестных в узле – $w_i$ и $\varphi_i^y$) имеет следующие неповторяющиеся элементы верхнего треугольника:

$$\begin{aligned}
r_{11} = r_{22} &= K\frac{13}{35}l + B\frac{6}{5l} - R\frac{6}{5l} + S_2\frac{6}{l^3};\\
r_{12} = &= K\frac{9l}{70} - B\frac{6}{5l} + R\frac{6}{5l} - S_2\frac{6}{l^3};\\
r_{13} = -r_{24} &= -K\frac{11}{210}l^2 + B\frac{1}{10} + R\frac{6}{10} + S_2\frac{3}{l^2};\\
r_{14} = -r_{23} &= -K\frac{13}{420}l^2 + B\frac{1}{10} - R\frac{1}{10} + S_2\frac{3}{l^2};\\
r_{33} = r_{44} &= K\frac{1}{105}l^3 + B\frac{2}{15}l - R\frac{2}{15}l + S_2\frac{2}{l};\\
r_{34} = & -K\frac{1}{140}l^3 - B\frac{1}{30}l + R\frac{1}{30}l + S_2\frac{2}{l}.
\end{aligned} \tag{19}$$

В выражениях (19) можно выделить первые два слагаемые, – те, которые соответствуют "традиционному" решению плоской задачи, полученному ранее [4], с заменой параметра $2t$ на параметр $B$.

При решении пространственной задачи поле перемещений принимается в виде:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \Psi_1(z)\cdot u(x,y);\\
v(x,y,z) &= \Psi_1(z)\cdot v(x,y);\\
w(x,y,z) &= \Psi_3(z)\cdot w(x,y).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Функции $\Psi_1(z)$ и $\Psi_3(z)$ принимаются по (36) и (38) из [2].

Используя граничное условие при $z = 0$

$$
\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \Psi_1(z)\cdot v(x,y) + \Psi_3(z)\cdot w_y'(x,y) = 0\,, \tag{21}
$$

получаем

$$
v(x,y) = H\cdot w_y'(x,y). \tag{22}
$$

Аналогично, используя условие равенства нулю на дневной поверхности $\gamma_{xz}$ (соблюдение закона парности касательных напряжений Коши), получаем:

$$
u(x,y) = H\cdot w_x'(x,y). \tag{23}
$$

Теперь, имея откорректированное поле перемещений для пространственного КЭ упругого слоя с 12 степенями свободы в виде:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \Psi_1(z)\cdot H\cdot w_x'(x,y) = \Phi(z)\cdot w_x'(x,y);\\
v(x,y,z) &= \Psi_1(z)\cdot H\cdot w_y'(x,y) = \Phi(z)\cdot w_y'(x,y);\\
w(x,y,z) &= \qquad\qquad\qquad\quad\;\, = \Psi_3(z)\cdot w(x,y),
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где функция $\Phi(z)$ определена в (14), получаем в результате применения стандартной процедуры МКЭ численное решение пространственной задачи.

Параметры рассматриваемой пространственной модели основания имеют вид :

$$
K = \frac{E_0}{1-\mu_0^2}\int_0^H \left\{\Psi_3'(z)\right\}^2 dz, \tag{25}
$$

$$
B = \frac{E_0}{2(1+\mu_0)}\int_0^H \left\{\Phi(z)\right\}^2 dz, \tag{26}
$$

$$
R = 2\frac{E_0}{1-\mu_0^2}\int_0^H \Phi(z)\cdot\Psi_3'(z)dz, \tag{27}
$$

$$S_1 = 2\frac{E_0}{2(1+\mu_0)}\int_0^H \{\Phi(z)\}^2 dz, \tag{28}$$

$$S_2 = 2\frac{E_0}{1-\mu_0^2}\int_0^H \{\Phi(z)\}^2 dz. \tag{29}$$

Размерность первых двух параметров – аналогов параметров $K$ и $2t$ – (18) из [2] совпадает с их размерностью- (т/м$^3$) и (т/м), такую же размерность (т/м) имеет третий параметр $R$, размерность «крутильных» параметров $S_1$ и $S_2$ – тм.

Первые четыре элемента матрицы жесткости КЭ-12 упругого «пятипараметрического» основания имеют следующий вид (ниже приводятся только добавки к "традиционному" конечноэлементному решению [5]) :

$$r_{11} = -R\frac{5}{12}\left(m+\frac{1}{m}\right) + S_1\frac{16}{15ml^2} + S_2\frac{2m+\frac{1}{m}+\frac{2}{m^3}}{l^2}; \tag{30}$$

$$r_{12} = R\frac{1}{60}\left(-11m+\frac{25}{m}\right) - S_1\frac{16}{15ml^2} + S_2\frac{m-\frac{1}{m}-\frac{2}{m^3}}{l^2}; \tag{31}$$

$$r_{13} = -R\frac{11}{60}\left(m+\frac{1}{m}\right) + S_1\frac{16}{15ml^2} + S_2\frac{-m+\frac{1}{m}-\frac{1}{m^3}}{l^2}; \tag{32}$$

$$r_{14} = R\frac{1}{60}\left(25m-\frac{11}{m}\right) + S_1\frac{16}{15ml^2} + S_2\frac{-2m-\frac{1}{m}+\frac{1}{m^3}}{l^2}. \tag{33}$$

где $m$ – соотношение сторон пространственного КЭ в плане. В "традиционном" решении также, как и в плоской задаче (см. выше), надо заменить параметр $2t$ на $B$ из (26). Как нетрудно видеть из рассмотрения (25)-(29) и (15)-(16), новая *«пятипараметрическая»* модель упругого основания не усложняет проблему назначения физических характеристик по сравнению с «традиционной» двухпараметрической.

В обоих случаях эта проблема заключается только в определении $\gamma_3$ из (38). Один из возможных способов решения этой проблемы – метод «численных штамповых испытаний» – рассматривается в [6].

Предложенная выше методика построения уточненных решений для модели сжимаемого слоя дает возможность реализовать также модель слоя с неполным прилипанием к подстилающей «скале» (модель с «проскальзыванием»):

$$u(x,y,z)_{z=H} \neq 0; \qquad v(x,y,z)_{z=H} \neq 0. \tag{34}$$

В этом случае в (9) – в разложениях для $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ – надо заменить $\Psi_1(z)$ по (36) на $\Psi_2(z)$ по (37) из [2], тогда выражения для $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ из [2] (15)-(16) примут вид:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\gamma_2} w_x{}'(x,y); \quad v(x,y,z) = \frac{1}{\gamma_2} w_y{}'(x,y); \quad w(x,y,z) = \Psi_3(z) \cdot w(x,y). \tag{35}$$

Таким образом, в данном случае $\Psi(z)$ становится числом $1/\gamma_2$ и отсюда следуют упрощения при определении параметров модели сжимаемого слоя с неполным прилипанием:

$$K = \frac{E_0}{1-\mu_0^2} \int_0^H \left\{\Psi_3{}'(z)\right\}^2 dz, \tag{36}$$

$$B = \frac{E_0}{2(1+\mu_0)} \int_0^H \left\{\Theta(z)\right\}^2 dz, \tag{37}$$

$$R = 2\frac{E_0}{\gamma_2(1-\mu_0^2)} \int_0^H \Psi_3{}'(z) dz, \tag{38}$$

$$S_1 = 2\frac{E_0}{2\gamma_2^2(1+\mu_0)} \int_0^H \left\{\Phi(z)\right\}^2 dz, \tag{39}$$

$$S_2 = 2\frac{E_0}{\gamma_2^2(1-\mu_0^2)} \int_0^H \left\{\Phi(z)\right\}^2 dz. \tag{40}$$

Проблема задания коэффициента $\gamma_2$ (имеющего размерность м$^{-1}$)

может быть решена так же, как и для коэффициента $\gamma_3$ [6], при обработке МНК горизонтальных перемещений, полученных при соответствующих «численных штамповых испытаниях. Вообще говоря, условие полного прилипания дает меньшие величины перемещений дневной поверхности основания (К.Е.Егоров, О.Я.Шехтер), однако, следуя тому же К.Е.Егорову, при расчете фундаментных плит значительных в плане размеров при ограниченной толщине слоя необходимо допустить наличие горизонтальных перемещений на нижней поверхности сжимаемой толщи.

Таким образом, решения для задачи об упругом сжимаемом слое, полученные при помощи уточненных квазидвухмерных схем, дают возможность учета горизонтальных перемещений. В работе Н.А.Цытовича «Теория и практика фундаментостроения», М.: СИ, 1964, составленной по материалам V Международного конгресса по механике грунтов и фундаментостроению, проходившего в Париже в июле 1961 г., среди многих других проблем рассмотрен также вопрос о горизонтальных перемещениях дневной поверхности. Так, в материалах одного из докладов на Конгрессе (Харди Р. и Риплея К. «Горизонтальные смещения, связанные в вертикальными осадками на основе натурных наблюдений одного из зданий металлургического завода») получено простое соотношение между вертикальными осадками поверхности грунта и соответствующими им горизонтальными перемещениями в виде:

$$u(v)=\alpha H,$$

где $u(v)$ – горизонтальное перемещение; $\alpha$ – градиент вертикальных осадок в рассматриваемой точке; $H$ – толщина гравелистого слоя грунта, залегающего над сжимаемой толщей грунта.

Н.А.Цытович отмечает, что «...доклад интересен тем, что привлекает внимание к явлению, изучением которого в настоящее время мало кто занимается... По наблюдениям НИИ оснований и подземных сооружений (НИИОПС) горизонтальные смещения фундаментов сооружений особенно часто наблюдаются при осадках над горными выработками...».

В 70-80-х годах проблемой строительства в районах с горными выработками (Донбасс, Урал, Кузбасс, другие добывающие регионы) и на просадочных грунтах, в связи с возникшей проблемой уменьшения свободных для застройки площадей, занимались НИИОПС, НИИСК (Киев), Донецкий ПСП, Харьковский ПСП, РИСИ и др.

Итак, учет горизонтальных перемещений сжимаемого слоя никаких принципиальных затруднений не вызывает, только приводит к появлению новых «параметров» модели основания типа (18) [2] и к увеличению порядка разрешающих систем линейных уравнений МКЭ.

Термин «новая техническая теория расчета конструкций на упругом основании» употреблялся В.З.Власовым и Н.Н.Леонтьевым в работах и сообщениях 1952-1958 гг., а также в Предисловии к классической книге «Балки, плиты и оболочки на упругом основании» издания 1960 г. [3], но в дальнейшем его авторами (т.е. В.З.Власовым и Н.Н.Леонтьевым) не употреблялся. Очевидно, это объяснялось некоторой неопределенностью в задании функции распределения перемещений по высоте сжимаемого слоя $\Psi(z)$, на априорном задании которой и основана вся теория.

Полная аналогия с ТТИП в последовательности построения приближенного решения для сжимаемого слоя, решение проблемы задания функции $\Psi(z)$ [2] и проблемы введения в расчетную схему бесконечной осадочной лунки [6], разработка альтернативных квазидвухмерных схем конечноэлементной реализации задачи об упругом слое [7-9] дают основания для пользованием термином *«техническая теория сжимаемого слоя»* - *ТТСС*.

1.Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

2.Рапопорт Г.А. К расчету зданий и сооружений по комплексным расчетным схемам. Решение задачи В.З.Власова об упругом сжимаемом слое методом Л.В.Канторовича // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып.55. – К.: Техніка, 2004. – С.281-290.

3.Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.

4.Рапопорт Г.А. Расчет деформируемого основания и плитно-стержневых каркасов по комплексной схеме методами конечных элементов: Автореф. дисс. … канд. техн. наук / РИСИ. – Ростов-на- Дону, 1979. – 26 с.

5.Васильков Г.В., Рапопорт Г.А. Приложение МКЭ к решению задач теории сооружений на упругом основании // Метод конечных элементов в строительной механике. – Горький: ГГУ им. Н.М.Лобачевского, 1975. – С. 86-95.

6.Васильков Г.В., Рапопорт Г.А., Шпитюк Е.Н. Квазидвухмерные расчетные схемы при конечноэлементной реализации модели упругого сжимаемого слоя // Известия вузов. Строительство. – 1999. №6. – С. 21-25.

7.Рапопорт Г.А., Метелюк Н.С., Васильков Г.В. Определение дифференциальным методом конечных элементов осадок упругого слоя, подстилаемого несжимаемым основанием // Строительные конструкции. Вып. XXXI. – К., 1978. – С.19-25.

8.Васильков Г.В., Лопатин Я.А., Рапопорт Г.А. К решению пространственной задачи об упругом слое, подстилаемым несжимаемым основанием // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1982. – №8. – С. 47-51.

9.Рапопорт Г.А. Конечноэлементная реализация модели упругого слоя на основе синтеза МКЭ с методом начальных функций (МНФ) // Науковий вісник будівництва. Вип. 22. – Харків: ХДТУБА ХОТВ АБУ, 2003. – С.188-200.

*Получено 02.02.2004*